

**$\vdash \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow \forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$**

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Supuesto
2. $P(x) \rightarrow Q(x)$	Elim. $\forall$ (1) $\{x/x\}$
3. $\neg Q(x)$	Supuesto
4. $\neg P(x)$	MT. (2,3)
5. $\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)$	Introd. $\rightarrow$ (3-4)
6. $\forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$	Introd. $\forall$ (5)
7. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$	Introd. $\rightarrow$ (1-6)
8. $\forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$	Supuesto
9. $\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)$	Elim. $\forall$ (8) $\{x/x\}$
10. $P(x)$	Supuesto
11. $Q(x)$	MT. (9,10)
12. $P(x) \rightarrow Q(x)$	Introd. $\rightarrow$ (10-11)
13. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Introd. $\forall$ (12)
14. $\forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Introd. $\rightarrow$ (8-13)
15. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow \forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$	Introd. $\leftrightarrow$ (7,14) ■

**$\vdash \exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$**

1. $\exists x \forall y P(x,y)$	Supuesto
2. $\forall y P(a,y)$	Elim. $\exists$ (1) $\{x/a\}$
3. $P(a,y)$	Elim. $\forall$ (2) $\{y/y\}$
4. $\exists x P(x,y)$	Introd. $\exists$ (3)
5. $\forall y \exists x P(x,y)$	Introd. $\forall$ (4)
6. $\exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$	Introd. $\rightarrow$ (1-5) ■

**$\vdash \forall y \exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$**

1. $\forall y \exists x P(x,y)$	Supuesto
2. $\exists x P(x,y)$	Elim. $\forall$ (1) $\{y/y\}$
3. $P(a,y)$	Elim. $\exists$ (2) $\{x/a\}$
4. $\forall y P(a,y)$	Introd. $\forall$ (3)
5. $\exists x \forall y P(x,y)$	Introd. $\exists$ (4)
6. $\forall y \exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$	Introd. $\rightarrow$ (1-5) ■